



· 不确定性与知识获取 ·

基于参考集的广义模糊数排序方法及在三支冲突分析中的应用

周小锋, 李小南

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710071)

摘要 针对模糊数排序现有方法中参考集的选取带有盲目主观性的问题,提出了一种新的基于参考集和评价函数的广义模糊数排序方法。首先,该方法借助模糊距离定义参考集,其优点是能够减少因参考集预先给定或选取而增加的不确定性。其次,利用区间相似度和广义模糊数的质心构建评价函数,并给出了新的广义模糊数排序方法的框架。此外,通过实例将此方法与现有排序方法进行比较,验证了该方法的有效性和合理性。最后,将该方法应用于三支冲突分析中,评价不同方法所建立的联盟。

关键词 广义模糊数;参考集;评价函数;模糊数排序;三支冲突分析

中图分类号:O159 DOI:10.16152/j.cnki.xdxbr.2025-02-012

Generalized fuzzy numbers ranking method based on reference set and its application in three-way conflict analysis

ZHOU Xiaofeng, LI Xiaonan

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract In view of the blind subjectivity of reference set selection in the existing methods, this paper proposes a new generalized fuzzy number ranking method based on reference set and evaluation function. Firstly, the proposed method defines the reference set with the help of fuzzy distance, which has the advantage of reducing the uncertainty increased by the pre-given and selected reference set. Secondly, the evaluation function is constructed by using the centroid of interval similarity and generalized fuzzy numbers, and the framework of a new generalized fuzzy number ranking method is given. In addition, the effectiveness and rationality of the proposed method are verified by comparing it with the existing ranking methods by an example. Finally, the method is applied to the three-way conflict analysis to evaluate the alliances established by different methods.

Keywords generalized fuzzy numbers; reference set; evaluation function; fuzzy number ranking; three-way conflict analysis

在现实生活中,人们常常会遇到模糊的或不精确的信息。为处理具有不精确信息的实际问题,Zadeh 在 1965 年首次引入模糊集(经典集合

的推广)^[1]。作为经典实数的模糊推广,模糊数是描述不精确信息的强有力工具。鉴于此,模糊数排序在模糊风险分析、近似推理、模式识别、决

收稿日期:2024-09-05

基金项目:国家自然科学基金(61976244)

第一作者:周小锋,男,从事冲突分析、模糊数排序研究,1850294569@qq.com。

通信作者:李小南,男,教授,博士生导师,从事模糊集、粗糙集及三支决策理论研究,lxn2007@163.com。

策等领域发挥着重要作用^[2-5]。在过去几十年里,国内外学者通过深入研究,提出了各种各样的模糊数排序方法。尽管如此,迄今为止还没有一个被人们广泛接受的排序方法。

现有排序方法主要分为 3 类。第 1 类是基于去模糊化,即定义模糊数到实数的映射,根据实数的自然序列实现排序。如 Chi 等通过计算模糊数的质心实现排序^[6],Nejad 等利用左面积与右面积的差对模糊数排序^[7]。该类方法的缺点是在比较分析时用实数替代模糊数,在计算过程中造成信息大量流失,从而增加了所得结果的不确定性。第 2 类是基于模糊二元关系的两两比较方法,进而得到排序。如 Ma 等通过定义模糊数间的附加优先度并利用权重函数对模糊数排序^[8],Li 等基于区间概率和区间测度实现排序^[9],该方法还为每对模糊数提供额外度用以评价联盟。该类方法的缺点是模糊二元关系的构建本身较为复杂,并且该方法在处理模糊数时往往不能满足传递性,使得其应用范围有限。第 3 类是与预定义参考集对比的方法排序。如 Jain 利用最小集合作为参考集来比较模糊数^[10],Lee-Kwang 通过预定义参考集并结合 T-模构建评价函数实现对模糊数排序^[11]。该方法很好地避免了上述两种方法的不足。

考虑到去模糊化、两两比较的排序方法在实际应用中存在不足,本文重点研究第 3 类方法,其具体过程如图 1 所示。

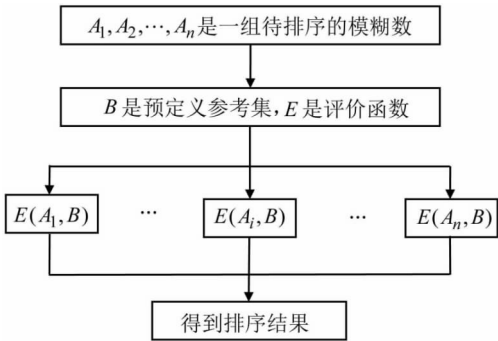


图 1 排序过程

Fig. 1 Ranking process

由图 1 可知,参考集的选取至关重要。如 Lee-Kwang 和 Lee^[11]中 F_1, F_2, F_3 是 3 个待排序的模糊数, V_1, V_2 是两个事先给定的不同的参考集。当选取 V_1 作为参考时,得到的排序结果为 $F_1 > F_2 > F_3$;而当选取 V_2 作为参考时,得到的排序结果为 $F_3 > F_2 > F_1$ 。仅因选取的参考集不同造成

最终的排序结果完全相反,这与实际相悖。

鉴于参考集的重要性及现有方法的缺陷,本文从构建参考集入手,减少因选取参考集而造成的不确定性。其次,通过区间相似度得到模糊数间的相似度,以此为基础结合质心建立评价函数。最后,结合参考集与评价函数得到新的排序方法。

1 预备知识

定义 1^[12] 论域 X 上的模糊集 $\tilde{A}$, 记作 $\tilde{A} = \{(x, f_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$ 。其中,隶属函数 $f_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$ 表示 x 在 $\tilde{A}$ 中的隶属度。当 $\tilde{A}$ 满足正规、凸时,称 $\tilde{A}$ 为论域 X 上的一个模糊数。

定义 2^[12] 模糊集 $\tilde{A}$ 的 α -水平集定义为 $\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X : f_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1]$, 模糊集 $\tilde{A}$ 的支集定义为

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X : f_{\tilde{A}}(x) > 0\}。$$

定义 3^[6] 一般地,当 $\tilde{A}$ 为广义梯形模糊数时,记作 $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega)$, 其隶属函数 $f_{\tilde{A}}(x)$ 为

$$f_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\omega(x-a)}{b-a}, & a \leq x < b; \\ \omega, & b \leq x \leq c; \\ \frac{\omega(x-d)}{c-d}, & c < x \leq d; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 满足 $a < b \leq c < d; \omega \in (0, 1]$; a 和 d 分别为广义梯形模糊数 $\tilde{A}$ 的下界和上界。此外,

$$f_{\tilde{A}}^L(x) = \frac{\omega(x-a)}{b-a}, a \leq x < b,$$

$$f_{\tilde{A}}^R(x) = \frac{\omega(x-d)}{c-d}, c < x \leq d,$$

分别称为左隶属函数和右隶属函数。而 $f_{\tilde{A}}^L$ 连续且在 $[a, b)$ 上递增, $f_{\tilde{A}}^R$ 连续且在 $(c, d]$ 上递减。故 $f_{\tilde{A}}^L$ 在区间 $[a, b)$ 上可逆, $f_{\tilde{A}}^R$ 在区间 $(c, d]$ 上可逆。它们的逆函数分别记作 $g_{\tilde{A}}^L(y)$ 和 $g_{\tilde{A}}^R(y)$, 则其 α -水平集 $\tilde{A}_{\alpha}$ 为

$$\tilde{A}_{\alpha} = \begin{cases} [b, c], & \alpha = \omega; \\ [g_{\tilde{A}}^L(\alpha), g_{\tilde{A}}^R(\alpha)], & \alpha \in (0, \omega)。 \end{cases} \quad (2)$$

其中:

$$g_{\tilde{A}}^L(y) = a + \frac{b-a}{\omega}y, 0 \leq y \leq \omega,$$

$$g_{\tilde{A}}^R(y) = d + \frac{c-d}{\omega}y, 0 \leq y \leq \omega。$$

当 $\omega = 1$ 时,则称 $\bar{A}$ 为正规梯形模糊数。其 α -水平集 $\bar{A}_\alpha$ 为

$$\bar{A}_\alpha = \begin{cases} [b, c], \alpha = 1; \\ [a + (b - a)\alpha, d - (d - c)\alpha], \alpha \in (0, 1)。 \end{cases}$$

当 $b = c$ 时,广义梯形模糊数将退化为广义三角模糊数,用 $\bar{A} = (a, b, d; \omega)$ 表示,且 $\omega \in (0, 1]$ 。

定义4^[6] 设 $\bar{A} = (a, b, c, d; \omega)$ 为广义梯形模糊数,其质心 $x_{\bar{A}}$ 定义为

$$x_{\bar{A}} = \frac{\int_a^d x f_{\bar{A}}(x) dx}{\int_a^d f_{\bar{A}}(x) dx} = \frac{1}{3} \left[a + b + c + d - \frac{dc - ab}{(d + c) - (a + b)} \right] \quad (3)$$

易知 $a < x_{\bar{A}} < d$ 。

由模糊集的表现定理可知,模糊数可由其 α -水平集表示。因此,可通过 α -水平集的区间运算得到相应模糊数的运算规则。

定义5^[9] 设 A, B, C 是广义梯形模糊数, $\lambda \in \mathbf{R}$ 且 $\alpha \in (0, 1]$ 。其加法、减法和数乘运算如下。

1) 加法。若 $C = A + B$, 则

$$C_\alpha = (A + B)_\alpha = [g_A^L(\alpha) + g_B^L(\alpha), g_A^R(\alpha) + g_B^R(\alpha)]。$$

2) 减法。若 $C = A - B$, 则

$$C_\alpha = (A - B)_\alpha = [g_A^L(\alpha) - g_B^L(\alpha), g_A^R(\alpha) - g_B^R(\alpha)]。$$

3) 数乘。令 $C = \lambda A$, 则

$$C_\alpha = (\lambda A)_\alpha = \begin{cases} [\lambda g_A^L(\alpha), \lambda g_A^R(\alpha)], \lambda > 0; \\ [\lambda g_A^R(\alpha), \lambda g_A^L(\alpha)], \lambda < 0。 \end{cases}$$

2 基于参考集与评价函数的排序方法

2.1 参考集

对于两个广义梯形模糊数 $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; \omega_1)$ 和 $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; \omega_2)$, 它们的 α -水平集分别为 $A_{1\alpha} = [g_{A_1}^L(\alpha), g_{A_1}^R(\alpha)]$ 和 $A_{2\alpha} = [g_{A_2}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha)]$, $\alpha \in (0, 1]$ 。则 $A_{1\alpha}$ 和 $A_{2\alpha}$ 之间的距离为

$$[d_\alpha^L, d_\alpha^R] = \lambda(A_{1\alpha} - A_{2\alpha}) + (1 - \lambda)(A_{2\alpha} - A_{1\alpha}) \quad (4)$$

其中:

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \frac{g_{A_1}^L(\omega_1) + g_{A_1}^R(\omega_1)}{2} \geq \frac{g_{A_2}^L(\omega_2) + g_{A_2}^R(\omega_2)}{2}; \\ 0, & \frac{g_{A_1}^L(\omega_1) + g_{A_1}^R(\omega_1)}{2} < \frac{g_{A_2}^L(\omega_2) + g_{A_2}^R(\omega_2)}{2}。 \end{cases}$$

定义6^[13] 设 $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; \omega_1)$ 和 $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; \omega_2)$ 是两个广义梯形模糊数, 其模糊距离为

$$d(A_1, A_2) = (0, \sigma, u, \nu; \omega) \quad (5)$$

其中:

$$\sigma = d_{\alpha=\omega}^L, u = d_{\alpha=\omega}^R,$$

$$\nu = \int_0^\omega d_\alpha^R d\alpha, \omega = \min(\omega_1, \omega_2)。$$

命题1 设 A_1, A_2, A_3 为3个广义模糊数, 则以下结论成立。

1) $d(A_1, A_2)$ 为正的模糊数;

2) $d(A_1, A_2) = d(A_2, A_1)$;

3) $d(A_1, A_3) < d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3)$ 。

证明 基于模糊距离的构造过程, 则结论1) 和结论2) 显然成立, 下证结论3) 成立。

设模糊数 A_1, A_2, A_3 的 α -水平集分别为

$$A_{1\alpha} = [g_{A_1}^L(\alpha), g_{A_1}^R(\alpha)],$$

$$A_{2\alpha} = [g_{A_2}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha)],$$

$$A_{3\alpha} = [g_{A_3}^L(\alpha), g_{A_3}^R(\alpha)],$$

其中: $\alpha \in (0, \omega], \omega = \min\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 。

要证 $d(A_1, A_3) < d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3)$ 成立, 只需证明

$$\text{supp}(d(A_1, A_3)) \subset$$

$$\text{supp}(d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3))。$$

根据模糊数 A_1, A_2, A_3 的相对位置, 讨论以下3种情况。为方便起见, 省略角标 α 。

i) 情况1。

$$\begin{aligned} \frac{g_{A_1}^L(\omega_1) + g_{A_1}^R(\omega_1)}{2} &\leq \frac{g_{A_2}^L(\omega_2) + g_{A_2}^R(\omega_2)}{2} \\ &\leq \frac{g_{A_3}^L(\omega_3) + g_{A_3}^R(\omega_3)}{2}, \end{aligned}$$

$A_{1\alpha}$ 和 $A_{3\alpha}$ 之间的距离为

$$[d_\alpha^L, d_\alpha^R] = [g_{A_3}^L - g_{A_1}^R, g_{A_3}^R - g_{A_1}^L],$$

$A_{1\alpha}$ 和 $A_{2\alpha}$ 之间的距离为

$$[d_\alpha^L, d_\alpha^R] = [g_{A_2}^L - g_{A_1}^R, g_{A_2}^R - g_{A_1}^L],$$

$A_{2\alpha}$ 和 $A_{3\alpha}$ 之间的距离为

$$[d_\alpha^L, d_\alpha^R] = [g_{A_3}^L - g_{A_2}^R, g_{A_3}^R - g_{A_2}^L],$$

则有

$$\begin{aligned}(g_{A_2}^L - g_{A_1}^R) + (g_{A_3}^L - g_{A_2}^R) &< g_{A_3}^L - g_{A_1}^R, \\ (g_{A_2}^R - g_{A_1}^L) + (g_{A_3}^R - g_{A_2}^L) &> g_{A_3}^R - g_{A_1}^L,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\text{supp}(d(A_1, A_3)) &\subset \\ \text{supp}(d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3)).\end{aligned}$$

故 $d(A_1, A_3) < d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3)$ 。

与情况 1 证明类似,下述两种情况也成立。

ii) 情况 2。

$$\begin{aligned}\frac{g_{A_1}^L(\omega_1) + g_{A_1}^R(\omega_1)}{2} &\leq \frac{g_{A_3}^L(\omega_3) + g_{A_3}^R(\omega_3)}{2} \\ &\leq \frac{g_{A_2}^L(\omega_2) + g_{A_2}^R(\omega_2)}{2}.\end{aligned}$$

iii) 情况 3。

$$\begin{aligned}\frac{g_{A_2}^L(\omega_2) + g_{A_2}^R(\omega_2)}{2} &\leq \frac{g_{A_1}^L(\omega_1) + g_{A_1}^R(\omega_1)}{2} \\ &\leq \frac{g_{A_3}^L(\omega_3) + g_{A_3}^R(\omega_3)}{2}.\end{aligned}$$

综上所述, $d(A_1, A_3) < d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3)$ 成立。

注 1 文献[13]中关于结论 3) 的描述为

$$d(A_1, A_3) \leq d(A_1, A_2) \oplus d(A_2, A_3),$$

但其证明过程借助实值函数将模糊数转化为实数进行比较,损失了大量信息,详细证明见文献[13]。因此,本文从模糊数的角度进行证明。

命题 2 设 $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; \omega_1)$ 和 $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; \omega_2)$ 是两个广义模糊数, $-A_1 = (-d_1, -c_1, -b_1, -a_1; \omega_1)$, $-A_2 = (-d_2, -c_2, -b_2, -a_2; \omega_2)$ 分别为它们的镜像则 $d(A_1, A_2) = d(-A_1, -A_2)$ 。

证明 设 A_1 和 A_2 的 α -水平集分别为

$$\begin{aligned}A_{1\alpha} &= [g_{A_1}^L(\alpha), g_{A_1}^R(\alpha)], \\ A_{2\alpha} &= [g_{A_2}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha)],\end{aligned}$$

其区间距离为 $[d_{\alpha}^L, d_{\alpha}^R]$ 。

$$\begin{aligned}-A_1 \text{ 和 } -A_2 \text{ 的 } \alpha\text{-水平集分别为} \\ -A_{1\alpha} &= [-g_{A_1}^R(\alpha), -g_{A_1}^L(\alpha)], \\ -A_{2\alpha} &= [-g_{A_2}^R(\alpha), -g_{A_2}^L(\alpha)],\end{aligned}$$

其区间距离为 $[\bar{d}_{\alpha}^L, \bar{d}_{\alpha}^R]$ 。则有

$$(-A)_{1\alpha} = -(A_{1\alpha}), (-A)_{2\alpha} = -(A_{2\alpha}),$$

进而

$$d_{\alpha}^L = \bar{d}_{\alpha}^L, d_{\alpha}^R = \bar{d}_{\alpha}^R.$$

故 $d(A_1, A_2) = d(-A_1, -A_2)$ 。

定义 7 设 $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i; \omega_i), i = 1, 2, \dots, n$ 是一组模糊数,其相对最大与相对最小模糊

数分别为 $A_{\max} = (a_{\max}, b_{\max}, c_{\max}, d_{\max}; \omega_{\max}), A_{\min} = (a_{\min}, b_{\min}, c_{\min}, d_{\min}; \omega_{\min})$, 其区间距离为 $[d_{\alpha}^L, d_{\alpha}^R]$, 则这组模糊数的参考集为

$$\Theta = (0, \frac{\sigma}{v}, \frac{u}{v}, 1; \omega = \min\{\omega_{\min}, \omega_{\max}\}).$$

其中:

$$\sigma = d_{\alpha=\omega}^L, u = \min\{d_{\alpha=\omega}^R, \int_0^{\omega} d_{\alpha}^R d\alpha\},$$

$$v = \max\{d_{\alpha=\omega}^R, \int_0^{\omega} d_{\alpha}^R d\alpha\},$$

ω 表示相对最大与相对最小模糊数之间高度值的最小值,且参考集 Θ 满足

- 1) $\forall A_i, i = 1, 2, \dots, n, \text{supp}(A_i) \subseteq \text{supp}(\Theta)$;
- 2) 其隶属函数为 $f_{\Theta}(x)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Theta}(x) dx$ 存在且不为零。

证明 1) 由定义 2 和定义 7 可知

$$\text{supp}(\Theta) = [0, 1], \text{supp}(A_i) = [a, d],$$

而 $0 \leq a, d \leq 1$, 故 $\text{supp}(A_i) \subseteq \text{supp}(\Theta)$ 。

2) 由定义 7 知 Θ 为 $[0, 1]$ 内的广义模糊数, 其隶属函数的积分值表示该广义模糊数在 $[0, 1] \times [0, \omega]$ 区域上的面积, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Theta}(x) dx$ 存在且不为零。

例 1 设 $A = (0.1, 0.2, 0.2, 0.4; 1), B = (0.2, 0.3, 0.4, 0.5; 1), C = (0.1, 0.4, 0.4, 0.6; 1)$, 这 3 个模糊数如图 2 所示。

其相对最大与相对最小模糊数分别为

$$A_{\min} = (0.1, 0.2, 0.2, 0.4; 1),$$

$$A_{\max} = (0.2, 0.4, 0.4, 0.6; 1).$$

由式(4)得到

$$[d_{\alpha}^L, d_{\alpha}^R] = [0.1 + 0.1\alpha, 0.2],$$

故参考集 $\Theta = (0, 1, 1, 1; 1)$, 如图 2 所示。

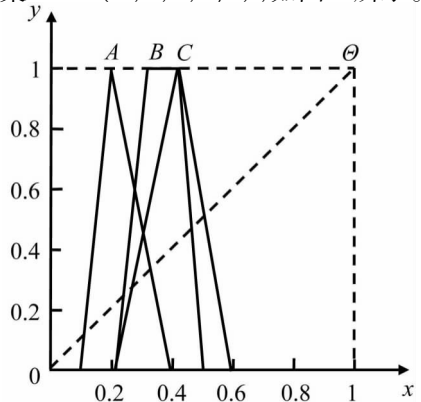


图 2 模糊数 A, B, C, Θ

Fig. 2 Fuzzy numbers A, B, C, Θ

注2 Sotoudeh-Anvari 等指出,若两个模糊数的交集为空,则这两个模糊数的大小唯一确定^[14]。因此,在一组模糊数 $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i; \omega_i), i \geq 2$ 中,存在 $A_j = (a_j, b_j, c_j, d_j; \omega_j), i \neq j$, 有 $d_i \leq a_j$ 或 $a_i \geq d_j$, 在求取相对最大模糊数与相对最小模糊数时应排除掉 A_j , 防止对结果造成较大误差。

2.2 评价函数

本节通过区间之间的相似度得到模糊数间的相似度并研究其相关性质。基于所提出的区间相似度构建模糊数间的评价函数。

对于两个区间 $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2]$, 两区间相交 $I_1 \cap I_2$ 的位置关系有如下3种形式,如图3所示。

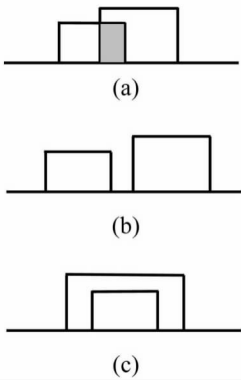


图3 区间相交的3种情况

Fig.3 Three cases where intervals intersect

两个区间的相似度为

$$S(I_1, I_2) = \frac{|I_1 \cap I_2|}{|I_1 \cup I_2|} \tag{6}$$

其中: $|\cdot|$ 表示区间长度。

根据区间相似度和模糊数的 α -水平集,广义模糊数间的相似度定义为定义8,并研究其相关性质。

定义8 设 $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; \omega_1)$ 和 $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; \omega_2)$ 是两个广义模糊数,它们的 α -水平集分别为 $A_{1\alpha}$ 和 $A_{2\alpha}$, 则 A_1 和 A_2 的相似度 $S(A_1, A_2)$ 为

$$S(A_1, A_2) = \frac{\int_0^\omega (A_{1\alpha} \cap A_{2\alpha}) d\alpha}{\int_0^\omega (A_{1\alpha} \cup A_{2\alpha}) d\alpha} \tag{7}$$

其中: $\omega \in [0, \min\{\omega_1, \omega_2\}]$ 。

性质1 设 A_1, A_2 和 A_3 是3个广义模糊数,则满足以下性质。

1) $0 \leq S(A_1, A_2) \leq 1$;

- 2) $S(A_1, A_2) = S(A_2, A_1)$;
- 3) $S(A_1, A_2) = 1 \Leftrightarrow A_1 = A_2$;
- 4) 若 $S(A_1, A_2) = 1, S(A_2, A_3) = 1$, 则 $S(A_1, A_3) = 1$ 。

证明 性质1) 和性质2) 显然成立,下证性质3) 和性质4) 成立。

3) 必要性。当

$$S(A_1, A_2) = \frac{\int_0^\omega (A_{1\alpha} \cap A_{2\alpha}) d\alpha}{\int_0^\omega (A_{1\alpha} \cup A_{2\alpha}) d\alpha} = 1,$$

有 $A_{1\alpha} \cap A_{2\alpha} = A_{1\alpha} \cup A_{2\alpha}$, 即 $A_1 = A_2$ 。

反之,当 $A_1 = A_2$ 时, $S(A_1, A_2) = 1$ 成立,即充分性也满足。

4) 由性质3) 可知,当 $S(A_1, A_2) = 1, S(A_2, A_3) = 1$ 时,有 $A_1 = A_2, A_2 = A_3$ 。因此, $A_1 = A_3$, 则 $S(A_1, A_3) = 1$ 。

通常模糊数不能直接比较大小,因此,国内外学者采取不同的方法对模糊数进行比较。其中评价函数深受广大学者关注,它将两个模糊数转化为实数,根据自然序列比较模糊数。本文基于区间相似度和广义梯形模糊数的质心提出所需评价函数。

定义9 设 $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i; \omega_i), i = 1, 2, \dots, n$ 是一组待排模糊数, Θ 为其参考集,则评价函数为

$$E(A_i, \Theta) = \frac{S(A_i, \Theta) + x_{A_i}}{2} \tag{8}$$

2.3 排序方法

本节提出一种基于参考集与评价函数的模糊数排序方法,并与现有方法进行比较展示其有效性。

设 $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i; \omega_i), i = 1, 2, \dots, n$ 是一组待排模糊数,其排序过程如下。

1) 求这组模糊数的参考集 Θ (若存在 j , 有 $\sup(\text{supp}(A_i)) < \inf(\text{supp}(A_j)), i \neq j$, 则计算参考集时去掉 A_j ;

2) 计算所有模糊数的 $S(A_i, \Theta)$;

3) 计算所有模糊数的 $E(A_i, \Theta)$;

4) 根据 $E(A_i, \Theta)$ 的大小对所有模糊数排序,其值越大相应的模糊数越大。

性质2 设 F 是模糊数的集合, $A_1, A_2, A_3 \in F$, 以下性质成立。

1) 对于 $A \in F$, 则 $A \leq A$;

2) 若 $A_1 > A_2, A_2 > A_3$, 则 $A_1 > A_3$;

3) 若 $\sup(\text{supp}(A_1)) < \inf(\text{supp}(A_2))$, 则 $A_1 < A_2$;

4) 对 $\lambda > 0, A_1 < A_2 \Leftrightarrow \lambda \otimes A_1 < \lambda \otimes A_2$;

5) 对 $\lambda < 0, A_1 < A_2 \Leftrightarrow \lambda \otimes A_1 > \lambda \otimes A_2$;

6) 若 $A_1 < A_2$ 则 $A_1 \oplus A_3 < A_2 \oplus A_3$ 。

证明 性质 1) 和性质 2) 显然成立, 下面证明性质 3) 成立。

3) 当 $\sup(\text{supp}(A_1)) < \inf(\text{supp}(A_2))$, 有 $g_{A_1}^L(0) \leq g_{A_1}^R(0) \leq g_{A_2}^L(0) \leq g_{A_2}^R(0)$,

而

$$g_{A_1}^L(0) < x_{A_1} < g_{A_1}^R(0),$$

$$g_{A_2}^L(0) < x_{A_2} < g_{A_2}^R(0),$$

则 $x_{A_1} < x_{A_2}$ 。设其参考集为 Θ , 有

$$S(A_2, \Theta) - S(A_1, \Theta) < x_{A_2} - x_{A_1},$$

则

$$S(A_2, \Theta) - S(A_1, \Theta) + x_{A_2} - x_{A_1} > 0,$$

即

$$E(A_1, \Theta) < E(A_2, \Theta)。$$

故 $A_1 < A_2$ 成立。

4) 设模糊数 A_1, A_2 的参考集为 Θ , 其 α -水平集分别为

$$A_{1\alpha} = [g_{A_1}^L(\alpha), g_{A_1}^R(\alpha)],$$

$$A_{2\alpha} = [g_{A_2}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha)],$$

当 $\lambda > 0$ 时, 有

$$\lambda A_{1\alpha} = [\lambda g_{A_1}^L(\alpha), \lambda g_{A_1}^R(\alpha)],$$

$$\lambda A_{2\alpha} = [\lambda g_{A_2}^L(\alpha), \lambda g_{A_2}^R(\alpha)],$$

且 $x_{\lambda A_1} = \lambda x_{A_1}, x_{\lambda A_2} = \lambda x_{A_2}$ 。

当 $A_1 < A_2$ 时, 有 $E(A_1, \Theta) < E(A_2, \Theta)$,

即

$$S(A_2, \Theta) - S(A_1, \Theta) + x_{A_2} - x_{A_1} > 0。$$

此时模糊数 $\lambda \otimes A_1, \lambda \otimes A_2$ 的参考集为 $\lambda \otimes \Theta$, 则有

$$S(\lambda \otimes A_2, \lambda \otimes \Theta) - S(\lambda \otimes A_1, \lambda \otimes \Theta) + x_{\lambda A_2} - x_{\lambda A_1} = \lambda(S(A_2, \Theta) - S(A_1, \Theta) + x_{A_2} - x_{A_1}) > 0,$$

即 $\lambda \otimes A_1 < \lambda \otimes A_2$ 。反之亦然。故

$$\lambda > 0, A_1 < A_2 \Leftrightarrow \lambda \otimes A_1 < \lambda \otimes A_2。$$

同理可证性质 5) 成立。特别地, 取 $\lambda = -1$, 当 $A_1 < A_2$ 时, 有 $-A_1 > -A_2$ 。

6) 设模糊数 A_1, A_2, A_3 的参考集为 Θ , 其 α -水平集分别为

$$A_{1\alpha} = [g_{A_1}^L(\alpha), g_{A_1}^R(\alpha)],$$

$$A_{2\alpha} = [g_{A_2}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha)],$$

$$A_{3\alpha} = [g_{A_3}^L(\alpha), g_{A_3}^R(\alpha)],$$

$$\Theta_\alpha = [g^L(\alpha), g^R(\alpha)]。$$

由模糊数的算术运算知

$$(A_1 \oplus A_3)_\alpha =$$

$$[g_{A_1}^L(\alpha) + g_{A_3}^L(\alpha), g_{A_1}^R(\alpha) + g_{A_3}^R(\alpha)],$$

$$(A_2 \oplus A_3)_\alpha =$$

$$[g_{A_2}^L(\alpha) + g_{A_3}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha) + g_{A_3}^R(\alpha)]。$$

$$\text{i) } (A_1 + A_3)_\alpha \cap \Theta_\alpha = \emptyset。$$

此时, $A_{1\alpha} \cap \Theta_\alpha = \emptyset$, 而

$$(A_2 \oplus A_3)_\alpha \cap \Theta_\alpha =$$

$$[g_{A_2}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha) + g_{A_3}^R(\alpha)],$$

$$(A_2 \oplus A_3)_\alpha \cap \Theta_\alpha =$$

$$[g_{A_2}^L(\alpha) + g_{A_3}^L(\alpha), g_{A_2}^R(\alpha)],$$

$$S((A_2 \oplus A_3), \Theta) =$$

$$\frac{\int_0^\omega [g_{A_2}^R(\alpha) + g_{A_3}^R(\alpha) - g^L(\alpha)] d\alpha}{\int_0^\omega [g^R(\alpha) - g_{A_2}^L(\alpha) - g_{A_3}^L(\alpha)] d\alpha} >$$

$$\frac{\int_0^\omega (g_{A_2}^R(\alpha) - g^L(\alpha)) d\alpha}{\int_0^\omega (g^R(\alpha) - g_{A_2}^L(\alpha)) d\alpha} =$$

$$S(A_2, \Theta),$$

有

$$S((A_2 \oplus A_3), \Theta) + (x_{A_2} + x_{A_3}) - (x_{A_1} + x_{A_3}) > S(A_2, \Theta) + x_{A_2} - x_{A_1} > 0,$$

即

$$E((A_1 + A_3), \Theta) < E((A_2 + A_3), \Theta)。$$

故 $A_1 \oplus A_3 < A_2 \oplus A_3$ 。

$$\text{ii) } (A_2 + A_3)_\alpha \cap \Theta_\alpha = \emptyset。$$

情况 ii) 证明与情况 i) 类似。

$$\text{iii) } (A_2 + A_3)_\alpha \cap \Theta_\alpha \neq \emptyset, (A_1 + A_3)_\alpha \cap \Theta_\alpha \neq \emptyset。$$

由情况 i) 和情况 ii) 证明知

$$S((A_2 \oplus A_3), \Theta) > S(A_2, \Theta),$$

$$S((A_1 \oplus A_3), \Theta) > S(A_1, \Theta),$$

有

$$S((A_2 \oplus A_3), \Theta) - S((A_1 \oplus A_3), \Theta) + (x_{A_2} + x_{A_3}) - (x_{A_1} + x_{A_3}) > S(A_2, \Theta) - S(A_1, \Theta) + x_{A_2} - x_{A_1} > 0,$$

即

$$E((A_1 + A_3), \Theta) < E((A_2 + A_3), \Theta)。$$

故 $A_1 \oplus A_3 < A_2 \oplus A_3$ 。

综上所述, 若 $A_1 < A_2$, 则 $A_1 \oplus A_3 < A_2 \oplus A_3$ 。

例 2 设 $A = (0.2, 0.3, 0.3, 0.6; 1), B = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6; 1), C = (0.2, 0.6, 0.6, 0.8;$

1),这 3 个模糊数如图 4 所示。

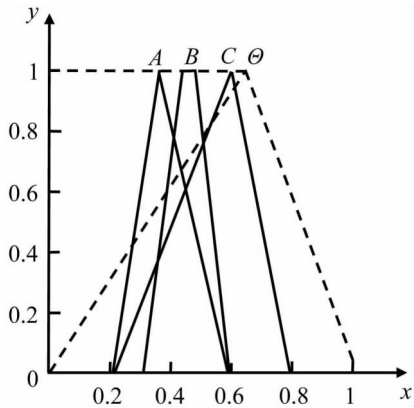


图 4 模糊数 A, B, C, Θ

Fig. 4 Fuzzy numbers A, B, C, Θ

首先,由定义 7 求其参考集为

$$\Theta = (0, 0.66, 0.66, 1; 1)。$$

其次,对任意 $\alpha \in [0, 1]$ 有

$$A_{\alpha} = [0.2 + 0.1\alpha, 0.6 - 0.3\alpha],$$

$$B_{\alpha} = [0.3 + 0.1\alpha, 0.6 - 0.1\alpha],$$

$$C_{\alpha} = [0.2 + 0.4\alpha, 0.8 - 0.2\alpha],$$

$$\Theta_{\alpha} = [0.66\alpha, 1 - 0.34\alpha]。$$

根据式(4)有

$$x_A = 3.6667, x_B = 0.45, x_C = 0.5333。$$

根据式(8),有

$$E(A, \Theta) = 0.3063,$$

$$E(B, \Theta) = 0.3647,$$

$$E(C, \Theta) = 0.5586,$$

即

$$E(A, \Theta) < E(B, \Theta) < E(C, \Theta)。$$

故 $A < B < C$ 。

例 3 设模糊数 $A = (0.1, 0.3, 0.4, 0.6; 0.8)$, $B = (0.2, 0.3, 0.3, 0.5; 1)$, $C = (0.2, 0.4, 0.5, 0.7; 0.9)$, $D = (0.7, 0.8, 0.8, 0.9; 0.9)$, 如图 5 所示。

由于 $\sup(\text{supp}(*)) \leq \inf(\text{supp}(D))$, 其中: $*$ = $\{A, B, C\}$ 。故求参考集时排除 D , 且模糊数 D 最大。

由定义 7 求其参考集为

$$\Theta = (0, 0.18, 0.7, 1; 0.8)。$$

对任意 $\alpha \in [0, 1]$, 有

$$A_{\alpha} = [0.1 + 0.25\alpha, 0.6 - 0.25\alpha],$$

$$B_{\alpha} = [0.2 + 0.1\alpha, 0.5 - 0.2\alpha],$$

$$C_{\alpha} = [0.2 + \frac{2}{9}\alpha, 0.7 - \frac{2}{9}\alpha],$$

$$\Theta_{\alpha} = [0.225\alpha, 1 - 0.375\alpha]。$$

模糊数 A, B, C 的质心分别为

$$x_A = 0.35, x_B = 0.3333, x_C = 0.45。$$

由式(8)知

$$E(A, \Theta) = 0.3724, E(B, \Theta) = 0.2851,$$

$$E(C, \Theta) = 0.4370,$$

即

$$E(B, \Theta) < E(A, \Theta) <$$

$$E(C, \Theta) < E(D, \Theta)。$$

故 $B < A < C < D$ 。

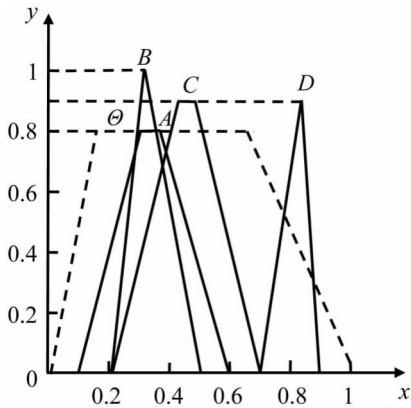


图 5 模糊数 A, B, C, D, Θ

Fig. 5 Fuzzy numbers A, B, C, D, Θ

3 比较分析

例 4 设模糊数 $A = (0, 0.2, 0.7, 0.7; 0.8)$, $B = (0.2, 0.5, 0.5, 0.9; 1)$, $C = (0.1, 0.6, 0.6, 0.8; 0.9)$, $D = (0.3, 0.5, 0.8, 0.9; 0.8)$, 如图 6 所示。

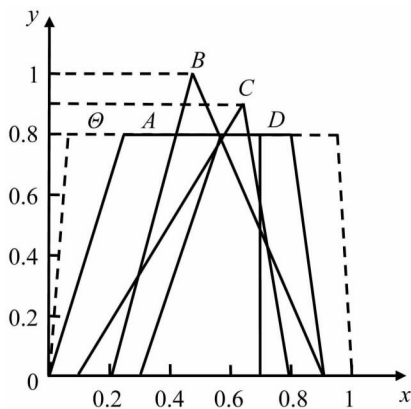


图 6 模糊数 A, B, C, D, Θ

Fig. 6 Fuzzy numbers A, B, C, D, Θ

首先,求其参考集为

$$\Theta = (0, 0.06, 0.98, 1; 0.8)。$$

其次,对任意 $\alpha \in [0,0.8]$,有

$$A_\alpha = [0.25\alpha,0.7],$$
$$B_\alpha = [0.2 + 0.3\alpha,0.9 - 0.4\alpha],$$
$$C_\alpha = [0.1 + \frac{5}{9}\alpha,0.8 - \frac{2}{9}\alpha],$$
$$D_\alpha = [0.3 + 0.25\alpha,0.9 - 0.125\alpha],$$
$$\theta_\alpha = [0.075\alpha,1 - 0.025\alpha].$$

则

$$x_A = 0.463\ 6, x_B = 0.533\ 3,$$
$$x_C = 0.5, x_D = 0.622\ 2,$$
$$E(A,\theta) = 0.419\ 3, E(B,\theta) = 0.511\ 7,$$
$$E(C,\theta) = 0.452\ 5, E(D,\theta) = 0.519\ 5,$$

即

$$E(A,\theta) < E(C,\theta) < E(B,\theta) < E(D,\theta).$$

故 $A < C < B < D$ 。

从表 1 可以看出,所提方法与文献中的大多数方法所产生的排序结果相同,故该方法是有效

的。文献[15-16] 中的方法得到的 A 最大,由图 6 可知 D 最大,所得到的结果与实际相悖。在文献[11] 中,当选择 V_1 和选择 V_2 作为参考集时得到的排序结果完全相反,说明参考集的选取对排序结果影响较大。在文献[17] 中,当持悲观态度时,即 $\alpha = 0$ 时,得到 $C < A < B < D$;当持中立和乐观态度时,其结果为 $A < C < B < D$ 。因此,本文所提出的排序方法可以弥补一些排序方法的不足。

与本文所得排序结果相同的这些方法中,当模糊数的质心相等时,文献[6] 所提方法不能判断大小;文献[11] 中的参考集 V_1 是事先给定的,因此其排序结果带有主观性;文献[15] 在遇到模糊数的上边长远小于下边长的情况时,会得到错误的排序结果;文献[18] 会得到模糊数与其镜像相等的错误结果。本文所提方法能够很好的克服上述缺陷。

表 1 与现存排序方法比较
Tab. 1 Comparison with existing ranking methods

方法	A	B	C	D	排序结果
Chi 等 ^[6]	0.463 6	0.533 3	0.500 0	0.622 2	$A < C < B < D$
Nejad 等 ^[7]	0.000 0	0.138 3	0.063 5	0.360 0	$A < C < B < D$
Lee-Kwang 等 ^[11]					
V_1	0.463 6	0.533 3	0.500 0	0.622 2	$A < C < B < D$
V_2	0.536 4	0.466 7	0.500 0	0.377 8	$D < B < C < A$
Dinagar 等 ^[16]	0.385 0	0.350 0	0.315 0	0.360 0	$C < B < D < A$
Yu 等 ^[17]					
$\alpha = 0$	-0.049 0	0.025 0	-0.056 3	0.088 0	$C < A < B < D$
$\alpha = 0.5$	0.109 4	0.187 5	0.131 6	0.216 0	$A < C < B < D$
$\alpha = 1$	0.267 8	0.350 0	0.319 5	0.354 0	$A < C < B < D$
Patra ^[15]	0.312 7	0.382 3	0.323 4	0.420 0	$A < C < B < D$
Bihari 等 ^[18]	1.674 1	1.644 0	1.646 5	1.864 9	$B < C < A < D$
Ma 等 ^[19]	0.047 9	0.064 8	0.049 2	0.099 4	$A < C < B < D$
Deng 等 ^[20]	0.589 9	0.725 7	0.687 2	0.742 6	$A < C < B < D$
本文方法	0.419 3	0.511 7	0.452 5	0.519 5	$A < C < B < D$

4 应用

在实际生活中,冲突无时无刻不在发生,个体与个体、国家与国家、个体与国家之间存在着诸如利益、思想、文化之间的冲突。对冲突的研究引起

了广大学者的关注,Pawlak 基于粗糙集对冲突进行了研究,根据代理之间的冲突度对代理进行分类并建立代理间的联盟^[21]。Yao 将三分的思想引入冲突分析中,扩展了 Pawlak 的工作,建立了三支冲突分析模型,根据代理之间的关系将其分为支持集、中立集、反对集,每个集合视为一个联

盟^[22]。随着学者们的深入研究,建立了在不同背景下的冲突分析,如 Li 等考虑代理对事件的评价是三角模糊数和梯形模糊数的情形,进而分别研究了在三角模糊信息系统和梯形模糊信息系统下的三支冲突分析^[23-24];常月等考虑代理对事件的评价是区间,讨论了在区间值模糊背景下的冲突分析^[25];杨文听等考虑到在信息的获取中可能会出现信息的丢失,从而分析了在不完备的模糊信息系统下如何建立联盟^[26]。在冲突分析时,应用不同的方法建立的联盟也有所差异,对联盟的评判至关重要。应用模糊数排序方法,能够评判不同方法所建立的联盟。接下来,应用基于参考集的方法比较这两种方法所建立的联盟。

例 5 本文借助 Li 等文章中的中东冲突问题^[24]。代理 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 分别代表以色列、埃及、巴勒斯坦、约旦、叙利亚、沙特阿拉伯 6 个国家。事件 a_1 代表西岸和加沙的巴勒斯坦自治国;事件 a_2 代表约旦河沿岸的以色列军事前哨;事件 a_3 代表以色列保留东耶路撒冷;事件 a_4

代表以色列在戈兰高地的军事前哨;事件 a_5 代表阿拉伯国家向选择留在其境内的巴勒斯坦人授予公民身份。代理对事件的态度值以梯形模糊数的形式给出,如表 2 所示。

Li 等将代理对事件的态度进行聚合,求代理对事件的总态度值 $\tilde{T}(u_i)$,并进行去模糊化处理,分别为 $D_1(u_i)$ 和 $D_2(u_i)$ ^[23-24],如表 3 所示。

基于决策理论粗糙集得阈值 $\alpha = 0.64, \beta = 0.45$ 。根据表 3 中的去模糊化值,建立联盟为

$$\begin{aligned} D_1(u_i) & \begin{cases} POS(U) = \{u_3, u_5\}; \\ BN(U) = \{u_6\}; \\ NEG(U) = \{u_1, u_2, u_4\}. \end{cases} \\ D_2(u_i) & \begin{cases} POS(U) = \{u_5, u_6\}; \\ BN(U) = \{u_1, u_3\}; \\ NEG(U) = \{u_2, u_4\}. \end{cases} \end{aligned}$$

基于表 3 中的去模糊化值,利用本文所提的方法求模糊数的评价价值。

表 2 中东冲突的梯形模糊信息系统

Tab. 2 A trapezoidal fuzzy information system for the Middle East conflict

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_1	(0.12,0.21,0.33,0.40)	(0.65,0.79,0.82,0.89)	(0.46,0.49,0.52,0.57)	(0.36,0.45,0.46,0.49)	(0.32,0.36,0.42,0.51)
u_2	(0.03,0.18,0.29,0.40)	(0.27,0.34,0.36,0.47)	(0.01,0.23,0.25,0.50)	(0.12,0.24,0.46,0.57)	(0.05,0.13,0.18,0.46)
u_3	(0.57,0.67,0.69,0.75)	(0.65,0.68,0.72,0.84)	(0.25,0.27,0.39,0.43)	(0.45,0.49,0.55,0.59)	(0.65,0.76,0.77,0.79)
u_4	(0.42,0.48,0.52,0.58)	(0.44,0.46,0.58,0.65)	(0.21,0.24,0.26,0.33)	(0.45,0.52,0.61,0.62)	(0.36,0.42,0.44,0.70)
u_5	(0.79,0.85,0.87,0.96)	(0.83,0.85,0.88,0.96)	(0.86,0.89,0.93,0.95)	(0.92,0.93,0.95,0.97)	(0.85,0.89,0.91,0.94)
u_6	(0.87,0.89,0.93,0.94)	(0.85,0.89,0.95,0.99)	(0.88,0.92,0.95,0.97)	(0.90,0.92,0.99,1.00)	(0.86,0.93,0.94,0.98)

表 3 态度的去模糊值

Tab. 3 The disambiguation value of the attitude

U	$\tilde{T}(u_i)$	$D_1(u_i)$	$D_2(u_i)$
u_1	(0.34,0.43,0.50,0.57)	0.46	0.36
u_2	(0.07,0.21,0.31,0.50)	0.28	0.04
u_3	(0.49,0.54,0.60,0.66)	0.57	0.69
u_4	(0.26,0.29,0.34,0.40)	0.32	0.34
u_5	(0.82,0.86,0.89,0.96)	0.88	0.65
u_6	(0.87,0.91,0.95,0.98)	0.93	0.63

由于

$$\begin{aligned} \sup(\text{supp}(u_i)) &\leq \inf(\text{supp}(u_5)), \\ \sup(\text{supp}(u_i)) &\leq \inf(\text{supp}(u_6)). \end{aligned}$$

其中: $i = 1, 2, 3, 4$,即 u_5, u_6 均优于 u_1, u_2, u_3, u_4 ,

此时分两步进行比较。

1) 比较 u_5, u_6 。

其参考集为

$$\Theta = (0, 0.02, 0.09, 0.125; 1),$$

则

$$E(u_5, \Theta) = 0.469\ 8, E(u_6, \Theta) = 0.478\ 9。$$

故 $u_5 < u_6$ 。

2) 比较 u_1, u_2, u_3, u_4 。

其参考集为

$$\Theta = (0, 0.47, 0.8, 1; 1),$$

则

$$\begin{aligned} E(u_1, \Theta) &= 0.340\ 2, E(u_2, \Theta) = 0.256\ 2, \\ E(u_3, \Theta) &= 0.372\ 9, E(u_4, \Theta) = 0.214\ 7。 \end{aligned}$$

故 $u_4 < u_2 < u_1 < u_3$ 。

根据表 4 中代理的评价值,可知排序结果为
 $u_4 < u_2 < u_1 < u_3 < u_5 < u_6$ 。

表 4 代理的评价值

Tab. 4 The evaluation value of the agent

U	$\tilde{T}(u_i)$	$E(u_i, \Theta)$	等级
u_1	(0.34, 0.43, 0.50, 0.57)	0.340 2	4
u_2	(0.07, 0.21, 0.31, 0.50)	0.256 2	5
u_3	(0.49, 0.54, 0.60, 0.66)	0.372 9	3
u_4	(0.26, 0.29, 0.34, 0.40)	0.214 7	6
u_5	(0.82, 0.86, 0.89, 0.96)	0.469 8	2
u_6	(0.87, 0.91, 0.95, 0.98)	0.478 9	1

根据优先级规则,联盟的优先级序列为 $POS(U) > BN(U) > NEG(U)$ 。文献[23]所建立的联盟不符合此规则,文献[24]所建立的联盟符合此规则,因为代理 u_6 对所有事件的总态度值为 (0.87, 0.91, 0.95, 0.98),即代理 u_6 应属于支持集 $POS(U)$,而文献[23]将 u_6 放在中立集。故文献[24]所建立的联盟优于文献[23]所建立的联盟。

一些现有排序方法所得结果如表 5 所示。由表 5 可知,本文方法与一些现有排序方法得到的优先级序列相同,故所提方法是有效的。文献[15]所得结果不满足联盟的优先级序列,因为此方法在处理模糊数 $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i; \omega_i), c_i - b_i < d_i - a_i$ 时会导致错误的结果。如 u_5 和 u_2 正确的结果为 $u_2 < u_5$,是因为该方法的缺陷所导致的错误结果。

表 5 排序结果对比

Tab. 5 Comparison of ranking results

U	排序结果
Chi 等 ^[6]	$u_2 < u_4 < u_1 < u_3 < u_5 < u_6$
Patra ^[15]	$u_4 < u_3 < u_1 < u_5 < u_2 < u_6$
Bihari 等 ^[18]	$u_4 < u_2 < u_1 < u_3 < u_5 < u_6$
Li 等 ^[9]	$u_2 < u_4 < u_1 < u_3 < u_5 < u_6$
本文方法	$u_4 < u_2 < u_1 < u_3 < u_5 < u_6$

5 结语

在现有排序方法中,由于参考集是事先给定的而导致很大的主观性,如何选择合适的参考集以避免增加不确定性是至关重要的问题。本文基于模糊距离构建参考集,利用区间相似度和广义

梯形模糊数的质心构建评价函数对模糊数排序,并给出了新的广义模糊数排序方法的框架。通过实例将此方法与现有排序方法进行比较,验证了该方法的有效性与合理性,弥补了一些排序方法的不足。此外,将该方法应用于三支冲突分析中,为更好的评价联盟提供支撑。在未来的工作中,将研究直觉模糊数、犹豫模糊数等模糊环境下的排序方法及其应用。

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] CHEN S M, MUNIF A, CHEN G S, et al. Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different left heights and right heights[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(7): 6320-6334.

[3] PONNIALAGAN D, SELVARAJ J, VELU L G N. A complete ranking of trapezoidal fuzzy numbers and its applications to multi-criteria decision making[J]. Neural Computing and Applications, 2018, 30(11): 3303-3315.

[4] CHU C H, HUNG K C, JULIAN P. A complete pattern recognition approach under Atanassov's intuitionistic fuzzy sets[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 66: 36-45.

[5] 杨彦坡,李小南. 三角模糊信息系统上的三支决策[J]. 模糊系统与数学, 2023, 37(6): 21-30.

YANG Y P, LI X N. Three-way decision on triangular fuzzy information systems [J]. Fuzzy Systems and Mathematic, 2023, 37(6): 21-30.

[6] CHI H T X, YU V F. Ranking generalized fuzzy numbers based on centroid and rank index [J]. Applied Soft Computing, 2018, 68: 283-292.

[7] NEJAD A M, MASHINCHI M. Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and the right sides of fuzzy number[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(2): 431-442.

[8] MA Z M, YANG W, LI L Q, et al. Ranking fuzzy numbers using additive priority degrees [J]. Expert Systems with Applications, 2023, 234: 121019.

[9] LI X N, WEI X L, QIAN Z H. A probability-measure-based approach to ranking fuzzy numbers via three-way decision and its application to conflict analysis [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 465: 108539.

[10] JAIN R. A procedure for multiple-aspect decision making using fuzzy sets[J]. International Journal of Sys-

- tems Science, 1977, 8(1): 1-7.
- [11] LEE-KWANG H, LEE J H. A method for ranking fuzzy numbers and its application to decision-making [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(6): 677-685.
- [12] 张小红, 裴道武, 代建华. 模糊数学与 Rough 集理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [13] CHAKRABORTY C, CHAKRABORTY D. A theoretical development on a fuzzy distance measure for fuzzy numbers [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 43(3/4): 254-261.
- [14] SOTOUDEH-ANVARI M, SOTOUDEH-ANVARI A. Setback in ranking fuzzy numbers: A study in fuzzy risk analysis in diabetes prediction[J]. Artificial Intelligence Review, 2023, 56(5): 4591-4639.
- [15] PATRA K. Fuzzy risk analysis using a new technique of ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers [J]. Granular Computing, 2022, 7(1): 127-140.
- [16] DINAGAR D S, KAMALANATHAN S. A method for ranking of fuzzy numbers using new area method [J]. Int J. Fuzzy Math Arch, 2015, 9(1): 61-71.
- [17] YU V F, VAN L H, DAT L Q, et al. Analyzing the ranking method for fuzzy numbers in fuzzy decision making based on the magnitude concepts [J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1279-1289.
- [18] BIHARI R, JEEVARAJ S, KUMAR A. Geometric approach for ranking generalized trapezoidal fuzzy numbers and its application in selecting security guard service company [J]. Expert Systems with Applications, 2023, 234: 121052.
- [19] MA Z M, YANG W, LI L Q, et al. Ranking fuzzy numbers using additive priority degrees [J]. Expert Systems with Applications, 2023, 234: 121019.
- [20] DENG Y, ZHU Z F, LIU Q. Ranking fuzzy numbers with an area method using radius of gyration [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2006, 51(6/7): 1127-1136.
- [21] PAWLAK Z. An inquiry into anatomy of conflicts [J]. Information Sciences, 1998, 109(1/2/3/4): 65-78.
- [22] YAO Y Y. Three-way conflict analysis: Reformulations and extensions of the Pawlak model [J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 180: 26-37.
- [23] LI X N, WANG X, LANG G M, et al. Conflict analysis based on three-way decision for triangular fuzzy information systems [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 132: 88-106.
- [24] LI X N, YANG Y P, YI H J, et al. Conflict analysis based on three-way decision for trapezoidal fuzzy information systems [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2022, 13(4): 929-945.
- [25] 常月, 王振, 任睿思, 等. 基于区间值模糊冲突表的三支冲突分析 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2023, 51(1): 78-86.
- CHANG Y, WANG Z, REN R S, et al. Three-way conflict analysis based on interval-valued fuzzy conflict situation [J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2023, 51(1): 78-86.
- [26] 杨文听, 易黄建, 陈跃, 等. 基于不完备信息系统的三支冲突分析 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2022, 50(3): 43-51.
- YANG W T, YI H J, CHEN Y, et al. Three-way conflict analysis based on incomplete information systems [J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2022, 50(3): 43-51.

(编辑 张欢)